Das Volumen des Kegelstumpfes – Die lange Herleitung einer einfachen Formel

Aus der Abbildung 1 können die folgenden Zusammenhänge (Strahlensätze!) entnommen werden:

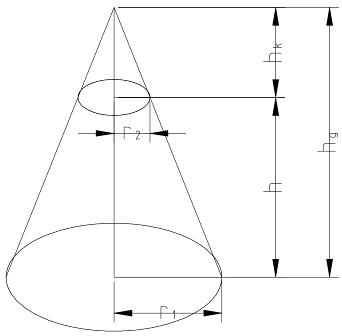

Abbildung 1: Benennungen am Kegelstumpf.

$$\frac{h_k}{r_2} = \frac{h_g}{r_1} = \frac{h_k + h}{r_1} \Leftrightarrow \frac{h_k}{r_2} - \frac{h_k}{r_1} = \frac{h}{r_1} = h_k \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \Leftrightarrow h_k = \frac{h}{r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{1}$$

Das Volumen des Kegelstumpfes berechnet sich als Differenz aus Volumen des großen Kegels und Volumen des kleinen Kegels. Einige Umformungen führen zu der oft in Formelsammlungen dargestellten einfachen Formel 10:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Kegelstumpf}} &= \frac{1}{3}\pi\left(h_g \cdot r_1^2 - h_k \cdot r_2^2\right) &(2)\\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 \cdot \left(h + \frac{h}{r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\right) - r_2^2 \cdot \frac{h}{r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\right) &(3)\\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 h + r_1 \cdot \frac{h}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} - r_2^2 \frac{h}{r_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\right) &(4)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + \frac{r_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} - \frac{r_2^2}{r_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\right) &(5)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + \frac{r_1}{\frac{r_1 - r_2}{r_2 \cdot r_1}} - \frac{r_2^2}{r_1 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_2 \cdot r_1}}\right) &(6)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + \frac{r_1^2 \cdot r_2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^3}{r_1 - r_2}\right) &(7)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2\left(\frac{r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}\right)\right) \qquad \text{3. bin. Formel} &(8)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2\left(\frac{(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{r_1 - r_2}\right)\right) &(9)\\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right) &(10)
\end{aligned}$$